Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya, 21 Oktober 2017
Surabaya, Universitas Airlangga

KAJIAN OPERATOR ACCRETIVE DAN SIFAT KETERBATASAN PADA RUANG HILBERT

Susilo Hariyantoe[1], Y.D Sumanto[2], Solikhin[3], Abdul Aziz

[1]*Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universtas Diponegoro*
Jl. Prof. Soedarto, SH, Tembalang Semarang
[1]sus2_hariyanto@yahoo.co.id
[2]ydsumanto@gmail.com
[3] soli_erf@yahoo.com
[4]abdul_aziz01@yahoo.com

Abstract— **Dalam artikel ini pertama-tama akan dibahas tentang suatu jenis operator linear yang dikonstruksikan pada ruang Hilbert. Jenis ini dikaitkan dengan sifat bagian riil dari hasil kali dalam bentuk tertentu harus positif atau nol. Operator dengan sifat tertentu ini disebut operator *accretive*. Selanjutnya artikel ini juga akan membahas keterkaitan operator *accretive* yang belum tentu merupakan operator terbatas dengan suatu semigrup kontraksi. Akhirnya, dengan definisi keterbatasan tegas accretive dan ω-accretive diperoleh suatu dalil-dalil yang dinyatakan dalam beberapa teorema yang merupakan inti dari pembahasan materi dalam artikel ini.**

Keywords— **Accretive, operator, semigrup operator.**

I. PENDAHULUAN

Salah satu kajian pokok dalam bidang analisa fungsional adalah teori operator. Operator merupakan suatu fungsi yang mengawankan dari ruang vektor ke ruang vektor lain. Konsep ini lebih khusus dibandingkan pengertian fungsi dalam kalkulus, yakni daerah asal maupun kawan tidak sekedar merupakan himpunan akan tetapi berupa ruang vektor.

Ruang vektor merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi penjumlahan dan pergandaan dengan fieldnya dan memenuhi sifat-sifat tertentu. Sifat-sifat tertentu inilah yang menarik untuk dikaji ketika dua buah ruang vektor direlasikan dengan suatu fungsi (operator).

Pada tahun 1989, Dai telah menyelesaikan secara lengkap masalah Cauchy dalam bentuk operator matrik secara lengkap. Sedangkan dalam kasus dimensi takhingga diantaranya telah dibicarakan oleh Carrol dan Showalter (1976). Tahun 1979, Favini dengan menggunakan tranformasi Laplace menyelesaikan masalah Cauchy dalam ruang Banach. Selanjutnya penyelesaian ini dilanjutkan oleh Favini dan dipublikasikan dalam aritikel-artikelnya di tahun 1985, 1988, 1989 dan 1990. Di awal tahun 1996, Thaller memperkenalkan masalah Cauchy nondegenerate. Penyelesaian masalah Cauchy orde dua pada ruang Banach dipiblikasikan oleh Hernandez (2005). Demikian beberapa ilmuwan yang telah telah menerapakan kajian tentang operator linear terbatas maupun tertutup pada masalah Cauchy. Penelitian ini telah dilanjutkan oleh penulis dan dipublikasikan pada tahun 2013.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis bermaksud mengkaji jenis operator lain yakni operator accretive. Harapannya setelah membahas secara detail tentang operator accretive ini, maka penulis pada kesempatan lain mampu mengakaitkan jenis operator ini dengan masalah Cauchy abstrak dimana operator-operator yang terlibat merupakan operator accretive.

II. DASAR TEORI

Sebelum menjabarkan mengenai operator accretive dan sifat keterbatasannya, terlebih dahulu dibahas tentang operator self-adjoint. Setelah itu akan dikaji kaitannya operator self adjoint dan sifat accretive. Oleh karena itu pada bagian ini akan diberikan terlebih dahulu tentang operator self adjoin dan contohnya.

Definisi 2.1(Weidmann)
Operator T dikatakan Self-adjoint atau Hermitian dalam kasus $T^* = T$

Contoh 2.2
Untuk setiap $k \in \mathbb{C}[0,1]$ dan $T_k \in B(L^2[0,1])$ didefinisikan

$$(T_k g)(t) = k(t)g(t)$$

Jika $f \in \mathbb{C}[0,1]$ dengan $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$
Dan Untuk setiap $k \in \mathbb{C}[0,1]$ bernilai real maka T_f operator self-adjoint
Bukti:
Andaikan $g, h \in L^2[0,1]$ dan $k = (T_f)^* h$ yang diperoleh dari $T_f \in B(L^2[0,1])$dengan$f \in \mathbb{C}[0,1]$
maka $\langle T_f g, h\rangle = \langle g, (T_f)^* h\rangle$
$= \langle g, k\rangle$
karena $k = (T_f)^* h$
Berdasarkan definisi adjoint

$$\int_0^1 T_f g(t)\overline{h(t)}dt = \int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}dt$$
$$= \int_0^1 g(t)f(t)\overline{h(t)}dt$$
$$= \int_0^1 g(t)\overline{k(t)}dt$$

Persamaan ini benar jika $\overline{k(t)} = f(t)\overline{h(t)}$

Sehingga

$$\begin{aligned} k(t) &= \overline{\overline{k(t)}} \\ &= \overline{\overline{h(t)}f(t)} \\ &= \overline{\overline{h(t)}}\,\overline{f(t)} \\ &= h(t)\overline{f(t)} \end{aligned}$$

Karena sifat unik dari adjoint maka dapat disimpulkan

$$\begin{aligned} (T_f)^* h(t) &= k(t) \\ &= \overline{f(t)}h(t) \\ &= T_{\bar{f}} h(t) \end{aligned}$$

Karena $(T_f)^* h(t) = T_{\bar{f}} h(t)$

Maka $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$

Kemudian akan dibuktikan bahwa memenuhi sifat self-adjoint $T = T^*$

Untuk setiap $f \in \mathbb{C}[0,1]$ bernilai real, hal ini berarti $\bar{f} = f$

Sehingga $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$

$= T_f$

Jadi terbukti bahwa T_f adalah operator self-adjoint.

Selanjutnya dari definisi dan contoh diatas, maka di bawah ini diberikan beberapa teorema penting yang berlaku pada operator self adjoint yang akan digunakan untuk membahas sifat-sifat keterbatasan operator accretive.

Teorema 2.3 (Berberian)

Misalkan T operator linear pada $\mathcal{H}$. Pernyataan berikut ini masing-masing adalah ekuivalen:

(a) T adalah Self-adjoint

(b) $(Tx|y) = (x|Ty)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{H}$

(c) $(Tx|x) = (x|Tx)$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$

(d) $(Tx|x)$ real, untuk setiap $x \in \mathcal{H}$

Bukti:

(a) Berarti (b) : $(Tx|y) = (x|T^*y)$Karena T self-adjoint berakibat

$(x|T^*y) = (x|Ty)$

(b) Berarti (c) : Di misalkan$y = x \in \mathcal{H}$ sedemikian hingga$(Tx|y) = (Tx|x)$ maka$(Tx|x) = (x|T^*x)$Karena T self-adjoint berakibat $(x|T^*x) = (x|Tx)$

(c) Berarti (d) : untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ adalah real karena $(Tx|x)^* = (x|Tx)$ Kemudian dari (c) $(x|Tx) = (Tx|x)$

(d) Berarti (a) : Dari (d) memerlihatkan bahwa $(Tx|x) = (Tx|x)^*$ kemudian karena $(Tx|x) = (Tx|x)^* = (x|Tx) = (T^*x|x)$ sehingga $T = T^*$ adalah self adjoint

Teorema 2.3(Berberian)

1) Jika S dan T adalah self-adjoint, maka $S + T = (S + T)^*$

2) Jika T adalah self adjoint, dan α real,αT adalah self-adjoint

3) Jika T adalah sembarang operator, $T^*T = TT^*$ dan $T + T^* = T^* + T$

4) Jika S dan T adalah self-adjoint, kemudian ST self-adjoint jika dan hanya jika $ST = TS$

Bukti:

1) Diambil sebarang $x \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} \langle (S+T)(x), x\rangle &= \langle S(x) + T(x), x\rangle \\ &= \langle S(x), x\rangle + \langle T(x), x\rangle \\ &= \langle x, S^*(x)\rangle + \langle x, T^*(x)\rangle = \langle x, S(x)\rangle + \langle x, T(x)\rangle \\ &= \langle S^*(x), x\rangle + \langle T^*(x), x\rangle = \langle S^*(x) + T^*(x), x\rangle \\ &= \langle (S+T)^*(x), x\rangle \end{aligned}$$

Jadi, $S + T = (S + T)^*$.

2) Diambil sebarang $x \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} \langle \alpha Tx, x\rangle &= \langle x, (\alpha T)^* x\rangle = \langle x, \alpha^* T^* x\rangle \\ &= \langle x, \alpha Tx\rangle \\ &= \langle \alpha^* T^* x, x\rangle = \langle (\alpha T)^* x, x\rangle \end{aligned}$$

3) Diambil sebarang $x \in \mathcal{H}$

Untuk sembarang operator komposite $T^*T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dan $TT^*: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Jika $x \in \mathcal{H}$ dan $\|x\| \leq 1$,

$\langle T^*T(x), x\rangle \leq \|T^*T(x)\|\|x\| \leq \|T^*T(x)\| \leq \|T^*T\| = \|T\|^2$, dan

$$\begin{aligned} \langle TT^*(x), x\rangle &\leq \|TT^*(x)\|\|x\| \leq \|TT^*(x)\| \\ &\leq \|TT^*\| = \|T\|^2 \end{aligned}$$

Karena $T = T^*$ yang berarti self-adjoint, maka terbukti bahwa $T^*T = TT^*$

- Untuk sembarang operator komposite $T^* + T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dan $T + T^*: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Jika $x \in \mathcal{H}$ dan $\|x\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \langle T^* + T(x), x\rangle &\leq \|T^* + T(x)\|\|x\| \\ &\leq \|T^* + T(x)\| \\ &\leq \|T^* + T\| = \|T + T\| = \|2T\| \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} \langle T + T^*(x), x\rangle &\leq \|T + T^*(x)\|\|x\| \\ &\leq \|T + T^*(x)\| \\ &\leq \|T + T^*\| = \|T + T\| = \|2T\| \end{aligned}$$

Karena $T = T^*$ yang berarti self-adjoint, maka terbukti bahwa $T^* + T = T + T^*$

4) Diambil sebarang $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \langle ST(x), x\rangle &= \langle T(x), S^*(x)\rangle = \langle x, T^*S^*(x)\rangle \\ &= \langle x, TS(x)\rangle = \langle (TS)^*(x), x\rangle \\ &= \langle TS(x), x\rangle \\ \Leftarrow \langle TS(x), x\rangle &= \langle S(x), T^*(x)\rangle = \langle x, S^*T^*(x)\rangle \\ &= \langle x, ST(x)\rangle = \langle (ST)^*(x), x\rangle \\ &= \langle ST(x), x\rangle \end{aligned}$$

Jadi dari bukti kanan dan kiri terbukti bahwa $ST = TS$ dengan $T = T^*$ adalah self adjoint.

Teorema 2.4(Berberian)

Jika T adalah operator, terdapat self adjoint operator A dan B sedemikian hingga $T = A + iB$. Maka

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*)$$

$$B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

Bukti:
Definisi A dan **B** oleh pernyataan sebelumnya, merupakan self adjoint, dan

$T = A + iB$, berlaku juga $T = C + iD$, dengan C dan D self-adjoint. Maka $T = C^* + iD^* = C - iD$ oleh karena $T + T^* = 2C$ dan $T + T^* = 2iD$. Maka $C = A$ dan $D = B$.

III. PEMBAHASAN

Diberikan $\mathcal{H}$ ruang Hilbert dan $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ suatu himpunan operator-operator linear pada $\mathcal{H}$. Perhatikanlah definisi operator accretive berikut:

Definisi 3.1
Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ disebut operator accretive jika $Re\langle Tu, u\rangle \geq 0$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.

Contoh 3.2:
Diberikan operator nol $\theta: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ di ruang $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kemudian didefinisikan dengan $\langle \theta x, x\rangle = \bar{\theta}$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$. Akan ditunjukkan bahwa operator θ tersebut accretive dengan memenuhi $Re\langle \theta x, x\rangle \geq 0$
Bukti:
Sebelum membuktikan bahwa θ adalah accretive akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa θ adalah operator linier yang berada di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Untuk setiap $x, y \in \mathcal{H}$ dengan $T(x) = \theta(x)$, $T(y) = \theta(y)$ dan skalar α, maka

$$T(x + y) = \theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$$
$$= T(x) + T(y)\text{, dan}$$
$$T(\alpha x) = \theta(\alpha x) = \alpha\theta(x) = \alpha T(x).$$

Terbukti bahwa operator $T = \theta$ adalah operator linier di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$
Kemudian akan dibuktikan bahwa $T = \theta$ adalah operator accretive. Berdasarkan definisi operator nol,

$T(x) = \theta(x) = \theta$ untuk setiap $x \in D(\theta) = \mathcal{H}$ akan berlaku $\langle \theta(x), x\rangle = \theta$ dengan $x \in \mathcal{H}$, akan ditunjukkan bahwa operator θ adalah operator accretive di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Diambil sebarang $x \in \mathcal{H}$, maka

$$Re\langle T(x), x\rangle = Re\langle \theta(x), x\rangle \geq \theta = 0, \forall x \in \mathcal{H}$$

Terbukti.

Operator Accretive adalah operator self-Adjoint Non-negatif. Sebelum menjabarkan mengenai hubungan operator accretive dan operator self-adjoint, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai operator self-adjoint.

Proposition 3.3
$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ adalah accretive jika dan hanya jika $T + T^*$ adalah operator selfadjoint non negatif.
Bukti:
Diambil sebarang $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
($\Longrightarrow$)
Dari definisi accretive diperoleh $Re\langle Tu, u\rangle \geq 0\ \forall u \in \mathcal{H}$. Karena $Re\langle Tu, u\rangle$ selalu bernilai positif maka,

$$\langle Tu, u\rangle + \langle Tu, u\rangle = \langle Tu, u\rangle + \langle u, T^*u\rangle$$
$$= \langle Tu, u\rangle + \langle u, Tu\rangle$$
$$= \langle Tu, u\rangle + \langle T^*u, u\rangle$$
$$= \langle (T + T^*)u, u\rangle \geq 0$$

(bagian real $(T + T^*)$ operator self adjoint non-negatif)
Sehingga karena $T + T^*$meruapan operator self-adjoint non-negatif maka merupakan operator accretive

($\Longleftarrow$)
Operator self-adjoint jika $T = T^*$ sehingga karena dari bentuk kartesian $A + iB = T$, oleh karena bagian real nya $T + T^*$ merupakan operator self-adjoint non-negatif. Sehingga dapat dikatakan bahwa operator self-adjoint non negatif pada bagian realnya merupakan operator accretive. $Re\langle Tu, u\rangle \geq 0\ \forall u \in \mathcal{H}$
Untuk sebuah operator accretive terbatas *T*, *T* dikatakan terbatas jika dan hanya jika untuk setiap x ∈ D(*T*), terdapat bilangan positif M sedemikian hingga $\|Tx\| \leq$ M, dengan mengingat $f_t(\zeta) = e^{-t\zeta}$ untuk t> 0, kita temukan $\|e^{-tT}\| \leq 1$. Dengan kata lain, kita peroleh kontruksi semigrup. Kenyataannya, setiap pengerjaan setiap *T* adalah tidak terbatas.

Contoh 3.4:
Diberikan operator nol $\theta: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pada ruang $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kemudian didefinisikan dengan $\langle \theta x, x\rangle = \theta$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$. Akan ditunjukkan bahwa operator θ tersebut accretive jika dan hanya jika memenuhi kaidah adjoint.
Bukti:
Telah dibuktikan pada contoh sebelumnya bahwa θ merupakan operator linier pada ruang $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa operator nol memenuhi kaidah self-adjoint.

$$Re\langle \theta x, x\rangle \geq 0\ \forall x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \langle \theta x, x\rangle + \langle \theta x, x\rangle \geq 0\ \forall x \in \mathcal{H}$$
$$\Leftrightarrow \langle \theta x, x\rangle + \langle x, \theta^* x\rangle \geq 0\ \ \forall x \in \mathcal{H}$$
$$\Leftrightarrow \langle \theta x, x\rangle + \langle x, \theta x\rangle \geq 0\ \forall x \in \mathcal{H}$$
$$\Leftrightarrow \langle \theta x, x\rangle + \langle \theta^* x, x\rangle \geq \theta \forall x \in \mathcal{H}$$
$$\Leftrightarrow \langle (\theta + \theta^*)x, x\rangle \geq \theta \forall u \in \mathcal{H}$$

Terbukti, bahwa $\theta + \theta^*$ merupakan self-adjoint non negatif.

Definisi3.5 (Bounded strictly accretive)
Sebuah operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dikatakan strictly accretive jika terdapat $\varkappa > 0$ sedimikian hingga $Re\langle Tu, u\rangle \geq \varkappa\|u\|^2$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.

Contoh 3.6:
Diberikan operator nol $\theta: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ di ruang $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kemudian didefinisikan dengan $\langle \theta x, x\rangle = \bar{\theta}$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$. Akan ditunjukkan bahwa operator θ tersebut strictly accretive dengan memenuhi $Re\langle Tx, x\rangle \geq \varkappa\|x\|^2$.

Bukti:
Dari contoh 1 telah dibuktikan bahwa θ adalah operator linier dan merupakan operator accretive. Kemudian akan dibuktikan bahwa θ adalah operator accretive yang kuat.Diketahui bahwa

operator nol θx dan $\langle \theta x, x\rangle = \bar{\theta}$ dengan $x \in \mathcal{H}$, akan ditunjukkan bahwa operator θ adalah operator accretive yang kuat.
Diambil sebarang $x \in \mathcal{H}$ dari yang diketahui bahwa operator θ adalah operator accretive, maka $Re\langle \theta x, x\rangle \geq 0$, kemudian akan dikatakan kuat jika terdapat $\varkappa > 0$ sedemikian hingga $Re\langle \theta x, x\rangle \geq \varkappa\|x\|^2$ untuk $x \in \mathcal{H}$. Maka, karena $\varkappa\|x\|^2 \geq \varkappa > 0$, sehingga benar bahwa $Re\langle \theta x, x\rangle \geq \varkappa\|x\|^2$.

Teorema 3.7
Dimisalkan bahwa T adalah operator strictly accretive terbatas, dan diberikan $\mu > \frac{\pi}{2}$. Jika $H^\infty(S^o_{\mu+})$, maka

$$\|f(T)\| \leq \sup_{\zeta \geq \iota R}|f(\zeta)| \leq \sup_{Re\zeta \geq 0}|f(\zeta)|$$

Bukti:
Diberikan $\psi \in \Psi(S^o_{\mu+})$. Kita dapat mengambil $\gamma = -\iota R$ karena $\mu > \frac{\pi}{2}$ dan maka

$$\psi(T) = \frac{1}{2\pi\iota}\int_\gamma \psi(\zeta)|R_T|\, d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_\gamma \psi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\iota R} \psi(\zeta)[(T-\zeta I)^{-1} + (T^* + I)^{-1}]d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\iota R} \psi(\zeta)[\frac{1}{(T-\zeta I)} + \frac{1}{(T^*+\zeta I)}]d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\iota R} \psi(\zeta)[\frac{(T^*+\zeta I)+(T-\zeta I)}{(T-\zeta I)(T^*+\zeta I)}]d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\iota R} \psi(\zeta)[\frac{(T^*+T)}{(T-\zeta I)(T^*+\zeta I)}]d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\iota R} \psi(\zeta)(T^*+\zeta I)^{-1}(T^*+T)(T-\zeta I)^{-1}\, d\zeta$$

Sekarang, terdapat $\psi_n \in \Psi(S^o_{\mu+})$ sedemikian hingga $\psi_n \longrightarrow f$ seragam di himpunan bagianyang kompak dari$S^o_{\mu+}$.

$$\psi_n(T) = \frac{1}{2\pi\iota}\int_\gamma \psi_n(\zeta)|R_T|\, d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_\gamma \psi_n(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\iota R} \psi_n(\zeta)[(T-\zeta I)^{-1} + (T^*+\zeta I)^{-1}]d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\iota R} \psi_n(T^*+\zeta I)^{-1}(T^*+T)(T-\zeta I)^{-1}\, d\zeta$$

Jadi, $\psi_n(T) \longrightarrow f(T)$.
Oleh karena$(T^*+\zeta I)^{-1}(T^*+T)(T-\zeta I)^{-1}$ dapat di pecah menyesuaikan bentuk inner-product, maka

$$f(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\iota y)(T^*+\iota yI)^{-1}(T^* + T)(T-\iota yI)^{-1}dy$$

menyebabkan

$$\langle f(T)u, v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle f(\iota y)(T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T - \iota yI)^{-1}u, (T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T - \iota yI)^{-1}v\rangle dy$$

Untuk semua $u, v \in \mathcal{H}$

Pilih $f(T) \equiv 1$,$u = v$, kita peroleh.

$$\|u\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\|(T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T-\iota yI)^{-1}u\right\|^2 dy$$

Dengan aplikasi dari Cauchy-Schawrtz,

$$|\langle f(T)u, v\rangle| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(iy)|\left\|(T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T-\iota yI)^{-1}u\right\|\left\|(T^* + T)^{\frac{1}{2}}(T-\iota yI)^{-1}v\right\|dy$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{y\in R}|f(iy)|\left\|(T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T-\iota yI)^{-1}u\right\|\left\|(T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T-\iota yI)^{-1}v\right\|dy$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{y\in R}|f(iy)|\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T-\iota yI)^{-1}u\right\|\left\|(T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T-\iota yI)^{-1}v\right\|dy$$
$$= \sup_{\zeta\in\iota R}|f(\zeta)|\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(T^*+T)^{\frac{1}{2}}(T-\right.\right.$$

ιyI−1u2dy12
12π−∞∞(T+T)12T−ιyI−1v2dy12*

$$= \sup_{\zeta\in\iota R}|f(\zeta)|\,\|u\|\|v\|$$
$$= \sup_{Re\zeta\geq 0}|f(\zeta)|\,\|u\|\|v\|$$

Sehingga teorema terbukti.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S.K., 1994, A First Course in Real Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
Carroll, R.W & Showalter,R.E. (1976). Singular and Degenerate Cauchy Problems. *Math. Sci. Engrg*., Vol. 127. New York-San Fransisco-London; Academic Press.
Dai, L. (1989), *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Inform, Sci., Vol.118. Berlin-Heidelberg-New York; Springer-Verlag.
Favini, A. (1979). Laplace Tranform Method for a Class of Degenerate Evolution Problems. *Rend. Mat. Appl*. (2) 12.
Favini, A. (1980). Controllability Condition of Linear degenerate Evolution Systems. *Appl. Math. Optim.*
Favini, A. (1981). Abstract Potential Operator and Spectral Method for a Class of Degenerate Evolution Problems. *J. Differential Equations*, 39.
Favini, A.(1985). Degenerate and Singular Evolution Equations in Banach Space. *Math. Ann*., 273.
Favini, A., Plazzi, P. (1988). On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-1 the Linear Case. *Nonlinear Analysis*, 12.
Favini, A., Plazzi, P. (1989). On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-2 theNonlinear Case. *Nonlinear Analysis*, 13.
Favini, A., Plazzi, P. (1990). On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-3 Applications to Linear and Nonlinear Problems. *Osaka J. Math*. 27.
Favini, A., Yagi, A. (1992). Space and Time Regularity for Degenerate Evolution Equations. *J. Math. Soc. Japan*, 44.

Hariyanto, S., Aryati, L., dan Widodo, (2013), Generalized Nonhomogeneous Abstract Degenerate Cauchy Problem, *Applied Mathematical Sciences*, Vol.7, No. 49, Hikari Ltd. 2441-2453.

Hernandez M. (2005). Existence Result For Second-Order Abstract Cauchy Problem With NonLocal Conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol 2005.

Kappel, F. & Schappacher, W. (2000). *Strongly Continuous Semigroups, An Introduction*.

Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, New York: Springer-Verlag.

Thaller, B. (1992). *The Dirac Eqution*, Text and Monographs in Physics, Heidelberg-New York: Springer Verlag.

Thaller, B. & Thaller, S. (1996a). Factorization of Degenerate Cauchy Problems : The Linear Case. *Operator Theory Journal*, 121-146.

Thaller, B. & Thaller, S. (1996b). *Approximation of Degenerate Cauchy Problems*, SFB F0003 ”Optimierung und Kontrolle” 76, University of Graz.

Weidman, J. (1980). *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Berlin-Heidelberg- New York: Springer-Verlag.

Zeidler, E. (1990). *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/A*. Berlin-Heidelberg- New York: Springer-Verlag,

Weidman, J. (1980). *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Berlin-Heidelberg- New York: Springer-Verlag.